Matematika elméleti összefoglaló

Tartalomjegyzék

1. Sorozatok jellemzése, határértéke

Monotonitás

Monton növő sorozat esetén:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \quad \textit{és} \quad a_{n+1} - a_n > 0$$

Monoton fogyó sorozat esetén:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \quad \textit{és} \quad a_{n+1} - a_n < 0$$

Korlátosság

A K-t a sorozat felső korlátjának nevezzük, ha

$$K \geq a_n$$

A K-t a sorozat alsó korlátjának nevezzük, ha

$$K \leq a_n$$

Küszöbszám

A sorozat azon tagját, amelytől kezdődően fennáll. az alábbi összefüggés, küszöbszámnak nevezzük:

$$|a_n - A| < \varepsilon$$

Határérték

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{a}{bármi}\right)^{bármi} = e^a \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^a}{a!} = 0 \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0 \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^a} = 1 \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{konstans}{n^\alpha} = \begin{cases} 0, ha\ \alpha > 0 \\ konstans, ha\ \alpha = 0 \\ \infty, ha\ \alpha < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha = \begin{cases} \infty, ha\ \alpha > 0 \\ 1, ha\ \alpha = 0 \\ 0, ha\ \alpha < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0, ha\ 0 \le a < 1 \\ 1, ha\ a = 1 \\ \infty, ha\ a > 1 \\ divergens, ha\ a < 0 \end{cases}$$

2. Függvények határértéke és folytonossága

Nevezetes határértékek, L'Hospital szabály

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax+b)}{ax+b}=\lim_{x\to 0}\frac{ax+b}{\sin(ax+b)}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{kifejezés}\right)^{kifejezés}=e^{a}$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Függvények folytonossága

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

A határérték számítás menete

a) ha a határértéket a +/- végtelenben vizsgáljuk:

- polinomok esetén kiemeljük a legmagasabb fokú tagot

- ha a kifejezésben és a nevezőben is szerepel x, alkalmazzuk az alábbi tételt:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{kifejezés}\right)^{kifejezés}=e^{a}$$

b) ha a határértéket egy konkrét számnál vizsgáljuk:

Behelyettesítjük a függvénybe azt a számot, ahol a határértéket keressük:

- ha az eredmény konkrét szám, akkor készen vagyunk;
- ha az eredmény nem adható meg, mert pl. 0-val kellene osztanunk, akkor
  - valamilyen trükkel megpróbáljuk átalakítani a kifejezést, hogy be tudjunk helyettesíteni;
  - ha az előző nem vezetett eredményre, akkor ábrázolnunk kell a függvényt és az ábra alapján határozzuk meg a határértéket.

3. Deriválás

A differenciál-hányados definíciója

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Deriválási szabályok

$(f \pm g)' = f' \pm g'$

$(fg)' = f'g + g'f$

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$

$[af(x)]' = af'(x) \quad a \in \mathbb{R}$

$(fog)' = f'[g(x)]g'(x)$

$a' = 0 \quad a \in \mathbb{R}$

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1} \quad \alpha \in \mathbb{R}$

$(a^x)' = a^x lna \quad a \in \mathbb{R}$

$(log_a x)' = \frac{1}{xlna} \quad a \in \mathbb{R}$

$(e^x)' = e^x$

$(lnx)' = \frac{1}{x}$

$(sinx)' = cosx$

$(cosx)' = -sinx$

$(tgx)'\frac{1}{cos^2x}$

$(ctgx)' = \frac{-1}{sin^2x}$

$(arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$(arccosx)' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$(arctgx)' = \frac{1}{1 + x^2}$

$(arcctgx)' = \frac{-1}{1 + x^2}$

x^x alakú függvények deriválása

1. Vesszük mindkét oldal logaritmusát $\quad lnf(x) = xlnx$

2. Deriválunk: $\quad \frac{1}{f(x)} f'(x) = lnx + 1$

3. Szorzunk f(x)-szel: $\quad f'(x) = (lnx + 1)x^x$

A függvények érintőinek egyenlete

$$y = f'(x) \cdot (x - x_0) + y_0$$

4. Függvényvizsgálat

A függvényvizsgálat lépései

i) Az értelmezési tartomány meghatározása (D_f)

Az értelmezési tartományt korlátozó függvények, műveletek:

- tört:

$$\frac{a}{b} \quad b \neq 0$$

- gyök:

$$\sqrt{x} \quad x \geq 0$$

- logaritmus:

$$log_a x \quad x > 0$$

ii) Tengelymetszetek meghatározása

- x tengellyel való metszéspont: f(x)=0
- y tengellyel való metszéspont: f(0)

iii) Paritás

- a függvény páros, ha f(x)=f(-x)
- a függvény páratlan, ha f(-x)=-f(x)

iv) Monotonitás

- a függvény monoton növő, ha f'(x)>0
- a függvény monoton fogyó, ha f'(x)<0

v) Szélsőértékek

A függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol f'(x)=0. Ez(eke)t a ponto(ka)t nevezzük stacionárius pont(ok)nak.

- Ha f''(x) a stacionárius pontban pozitív, a függvénynek minimuma van. $f''(x) > 0 \rightarrow min$
- Ha f''(x) a stacionárius pontban negatív, a függvénynek maximuma van. $f''(x) < 0 \rightarrow max$

vi) Konvexitás

- Ha $f''(x) > 0$, a függvény konvex.
- Ha $f''(x) < 0$, a függvény konkáv.
- Ha $f''(x) = 0$, és a második derivált ebben a pontban előjelet vált, akkor ezt a pontot inflexiós pontnak hívjuk.

vii) Határértékek

Az ábrához szükséges határértékek:

- $\pm$végtelenben,
- az értelmezési tartomány szakadási helyein.

viii) Értékkészlet (R_f)

ix) Aszimptoták

Az

$$y = ax + b$$

egyenest aszimptotának mondjuk, ha

$$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$$

$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad b = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - ax]$$

x) Ábra

5. Lineáris algebra

Műveletek vektorokkal

- vektorok összeadása/kivonása

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ a_3 \pm b_3 \end{pmatrix}$$

- vektor szorzása skalárral

$$\gamma \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma a_1 \\ \gamma a_2 \\ \gamma a_3 \end{pmatrix} \qquad \gamma \in \mathbb{R}$$

- skaláris szorzat

Jele: $\langle \vec{a}; \vec{b} \rangle$

Számítása:

$$\langle \vec{a}; \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

Tulajdonságai:

a) $\langle \vec{a}; \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}; \vec{a} \rangle$
b) $\langle \vec{a} + \vec{b}; \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}; \vec{c} \rangle + \langle \vec{b}; \vec{c} \rangle$
c) $\langle \gamma \vec{a}; \vec{b} \rangle = \gamma \langle \vec{a}; \vec{b} \rangle \quad \gamma \in \mathbb{R}$

- a vektor hossza:

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\langle \vec{a}; \vec{a} \rangle}$$

- két vektor hajlásszöge:

$$cos\alpha = \frac{\langle \vec{a}; \vec{b} \rangle}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|}$$

- vektorok merőlegessége:

Két vektor merőleges (ortogonális), ha skaláris szorzatuk 0, azaz

$$\langle \vec{a}; \vec{b} \rangle = 0$$

Műveletek mátrixokkal

- mátrixok összeadása/kivonása

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} \end{pmatrix}$$

- mátrix szorzása skalárral

$$\gamma \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma a & \gamma b \\ \gamma c & \gamma d \end{pmatrix}$$

- mátrixok szorzata

Két mátrix csak akkor szorozható, ha a bal oldali mátrix oszlopainak száma megegyezik a jobb oldali mátrix sorainak számával.

A mátrixok esetén csak speciális esetben igaz, hogy **AB**=**BA.**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

- mátrixok transzponálása:

A sorok és oszlopok felcserélése.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

6. Sorműveletek, függőség, rang

Sorműveletek

A mátrixok sok esetben egyszerűbb alakra hozhatók az ún. elemi sorműveletek segítségével.

Elemi sorműveletek:

- két tetszőleges sor koordinátáinak összeadása, kivonása
- tetszőleges sor(ok) szorzata tetszőleges skalárral
- tetszőleges sorok felcserélése

A sorműveletek eredményeként kapott egyszerűbb mátrix tulajdonságai megegyeznek az eredeti mátrix tulajdonságaival.

Vektorok függősége

Két vektor lineáris kombinációja alatt az alábbi szorzatot értjük:

$$\alpha\overrightarrow{a_1} + \beta\overrightarrow{a_2} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Két vektort lineárisan függetlennek mondunk, ha a null vektort csak triviálisan állítják elő, azaz a két vektor lineáris kombinációja csak akkor adja meg a null vektort, ha $\alpha = \beta = 0$.

Ha a két vektor a nullán kívül más α és β paraméterek mellett is előállítja a null vektort, akkor a két vektort lineáris függőnek mondjuk.

Mátrixok rangja

A mátrix rangja alatt a mátrix lineárisan független vektorainak számát értjük.

Meghatározása:

- elemi sorműveletekkel úgy alakítjuk a mátrixot, hogy minél több olyan sor legyen, amelyben csak 0 szerepel;
- a mátrix rangja azon sorok számával egyezik meg, amelyeknek nem sikerült minden elemét 0-vá alakítani.

7. Determináns, inverz

Determináns

Meghatározása:

- 2x2, illetve 3x3-as mátrixok esetén Sarrus-szabály
- magasabb rendű mátrixok esetén kifejtési tétel.

Sarrus-szabály 2x2-es esetben:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \det(A) = ad - bc$$

Sarrus-szabály 3x3-as esetben:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array}$$

$$\det(A) = aei + bfg + cdh - bdi - afh - ceg$$

Kifejtési tétel:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \det(A_{ij})\, c_{ij}$$

Ha egy mátrix determinánsa 0, akkor a mátrix szinguláris.

Ha egy mátrix determinánsa nem 0, akkor a mátrix reguláris.

Inverz

Definíció

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Ha egy mátrix determinánsa 0, akkor nem létezik az inverze.

Az inverz meghatározása:

- a mátrixot kibővítjük az egységmátrixszal
- a mátrixot elemi sorműveletekkel egységmátrixszá alakítjuk
- a mátrix inverze az első lépésben felvett egységmátrix azon alakja, amelyet a második lépés végrehajtása során kaptunk.

8. Egyenletrendszerek

Általános alak

$$Ax = b$$

A: az egyenletrendszer változóinak együttható-mátrixa

x: az egyenletrendszer együtthatói

b: konstans

- ha b=0, akkor homogén,
- ha $b \neq 0$, akkor inhomogén egyenletrendszerről beszélünk.

Megoldás

Az egyenletrendszer együttható-mátrixát elemi sorműveletekkel ún. lépcsős mátrixszá alakítjuk, s abból leolvassuk az egyenletrendszer összes lehetséges megoldását.

Egy egyenletrendszer csak akkor megoldható, ha az együttható-mátrix determinánsa nem 0, mivel az egyenletrendszert általánosságban az alábbiak szerint lehet megoldani.

$$Ax = b$$

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b$$

$$x = A^{-1}b$$

Esetek:

- Homogén egyenletrendszer:
  - az x_i=0 mindig megoldás
  - végtelen sok megoldás van

- Inhomogén egyenletrendszer
  - nincs megoldása (ellentmondás van az egyenletrendszerben)
  - egy megoldása van (az együttható-mátrix háromszög alakra hozható)
  - végtelen sok megoldása van (az együttható mátrix lépcsős alakra hozható és nincs benne ellentmondás)

9. Sajátérték, sajátvektor, definitség

Definíció

Az x vektort az A mátrix sajátvektorának, a λ számot a mátrix sajátértékének nevezzük, ha fennáll az alábbi egyenlőség

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \quad \vec{x} \neq 0$$

A sajátértékek meghatározása

a) A mátrix determinánsa alapján

- a mátrix főátlójában lévő elemekből kivonunk λ-t

- meghatározzuk azokat a λ értékeket, amelyekre az előbbi mátrix determinánsa 0 lenne, ezeket nevezzük a mátrix sajátértékeinek

- a sajátvektorokat úgy kaphatjuk meg, hogy az előző lépésben kapott sajátértékeket levonjuk a főátló elemeiből, s a kapott együttható-mátrixot homogén lineáris egyenletrendszerként megoldjuk

b) közvetlenül az elemi sorműveletek segítségével

elemi sorműveletekkel paraméteresen megoldjuk a homogén lineáris egyenletrendszert úgy, hogy az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása legyen; a kapott megoldásvektorok az A mátrix sajátvektorai.

c) a fenti két módszer kombinációjával

Diagonalizáció

A diagonális mátrix olyan mátrix, melynek csak a főátlójában vannak 0-tól különböző elemek, például:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Egy nxn-es mátrix diagonális alakra hozható, ha létezik n db sajátértéke és n db lineárisan független sajátvektora, mert ebben az esetben létezik a független sajátvektoraiból álló P mátrix, amelyre fennáll az alábbi összefüggés:

$$P^{-1}AP = diag(A)$$

A különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok függetlenek, így a függetlenséget csak akkor kell ellenőriznünk, ha a mátrixnak n-nél kevesebb különböző sajátértéke van.

Ekkor a mátrix diagonálisában az A mátrix sajátértékei állnak.

Ha az A mátrix szimmetrikus, akkor az A mátrix akkor diagonalizálható, ha a fenti P mátrix ortogonális. Egy mátrix akkor ortogonális, ha vektorai páronként merőlegesek és hosszuk 1. Ez a szimmetrikus mátrixok spektrál-tétele.

Definitség

Az A mátrix

- pozitív definit, ha minden sajátértéke pozitív;
- pozitív szemidefinit, ha minden sajátértéke ≥ 0;
- negatív definit, ha minden sajátértéke negatív;
- negatív szemidefinit, ha minden sajátértéke ≤ 0;
- indefinit, ha van pozitív és negatív sajátértéke is.

Hasznos összefüggés a sajátértékek meghatározásánál

Ha egy polinomnak van egész gyöke, akkor az a konstans tagjának osztója.

10. Többváltozós függvények

A többváltozós függvények deriválása (parciális deriválás)

A többváltozós függvények deriválására ugyanazok a szabályok vonatkoznak, mint az egyváltozós függvényekre. A különbség csak annyi, hogy egyszerre csak egy változó szerint tudunk deriválni. Ekkor a másik változót konstansként kell kezelni, így a másik változóra a konstansoknál megismert deriválási szabályokat kell alkalmazni.

A parciális deriváltaknak sok jelölése van, a leggyakoribbak az x szerinti parciális derivált esetén:

$$f_1^{'} = f_x^{'} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

Többváltozós függvények vizsgálata

A többváltozós függvényeknek is ott lehet szélsőértéke, ahol az első parciális deriváltjai megegyeznek 0-val. Ezeket itt is stacionárius pontoknak hívjuk.

A stacionárius pontokról úgy tudjuk eldönteni, hogy minimumai, vagy maximumai a függvénynek, hogy megvizsgáljuk a második deriváltakat. Mivel most függvényeink többváltozósak, a második deriváltból is több van, például egy kétváltozós függvénynek 4 darab parciális deriváltja van:

$$f_{xx}^{''}, f_{xy}^{''}, f_{yx}^{''}, f_{yy}^{''}$$

A második deriváltakat tartalmazó mátrixot Hess-mátrixnak nevezzük és H-val jelöljük.

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx}^{''} & f_{xy}^{''} \\ f_{yx}^{''} & f_{yy}^{''} \end{pmatrix}$$

A deriválás sorrendje felcserélhető, ezért $f_{xy}^{''} = f_{yx}^{''}$

A többváltozós függvények esetén a Hesse-mátrix definitsége alapján dönthetjük el, hogy a stacionárius pont szélsőérték-hely-e, s ha igen, akkor maximum, vagy minimum.

Ha H pozitív definit, akkor a függvénynek lokális minimuma van.

Ha H negatív definit, akkor a függvénynek lokális maximuma van.

Ha H indefinit, akkor a függvénynek nyeregpontja van.

Ha H szemidefinit, akkor további vizsgálatokkal is meg kell győződni arról, hogy minimum, maximum, vagy nyeregpont-e a stacionárius pont.